ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XIII Сем. № 155. № 11.

Содержаніе: Галилео Галилей. Критико-біографическій очеркъ *О. Пергамента.*—Опредѣленіе объемовъ усѣченныхъ призмъ, *П. Свѣшникова.*—Разложеніе квадратнаго трехчлена ax^2+bx+c съ цѣлыми коэффиціентами на два линейные сомножителя съ цѣлыми коэффиціентами, *С. Гирмана.* — Задачи №№ 423—428.—Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 288, 263, 197, 182, 76 и 123.—Списокъ нерѣшенныхъ задачъ 1-ой серіи.

ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЙ,

ЕГО ЖИЗНЬ и НАУЧНАЯ ДѢЯТЕЛЬНОСТЬ.

Критико-біографическій очеркъ

О. Пергамента.

(Продолженіе) *).

Мы переходимъ къ изложенію заслугъ Галилея въ области астрономіи. Казалось, что въ то время сама потребность вѣка родила трехъ великихъ мужей, которые, не смотря на то, что жили въ мѣстахъ, одно отъ другаго отдаленныхъ, и занимали совершенно различное общественное положеніе, тѣмъ не менѣе дѣйствовали совокупными силами для совершенія великаго переворота въ мірѣ науки. Между тѣмъ, какъ Тихо де-Браге, заключенный въ тѣсные предѣлы своего родного острова, съ любопытствомъ наблюдавшій со своей сторожевой башни движенія небесныхъ свѣтилъ, съ трудолюбивою настойчивостью замѣчавшій обращенія солнца луны и планетъ, накоплялъ матеріалы, доставившіе острому и пытливому уму Кеплера возможность установить свои міровые законы,—Галилей закладывалъ вѣчное незыблемое основаніе новой астрономіи, изобрѣтеніемъ зрительной трубы спасая систему Коперника отъ грозившаго ей забвенія, проливая новый свѣтъ на уже извѣстные факты, приводя въ доказательство непреложности новой системы новыя данныя, которыя оказались несравненно болѣе убѣдительными тѣхъ, какія могъ самъ Коперникъ завѣщать потомству.

*) См. «Вѣстникъ Оп. Физики» № 154, стр. 197.

Вопросъ объ изобрѣтеніи телескопа принадлежитъ къ наиболѣе спорнымъ въ исторіи физики. Можно съ увѣренностью предполагать, что честь перваго построенія телескопа принадлежитъ Голландіи; но кто изъ трехъ претендентовъ—Захарій Джансенъ, Генрихъ Липерсгеймъ, Яковъ Мецiусъ—является настоящимъ его изобрѣтателемъ, рѣшить трудно. Во всякомъ случаѣ изобрѣтеніе это было случайное; вѣсть о немъ дошла и до Галилея, и онъ, совершенно независимо, путемъ строго-логическаго размышленія о дѣйствіи сферическихъ стеколъ дошелъ до построенія телескопа.

Новоизобрѣтенный приборъ, [1]) казавшійся забавной игрушкой, превратился въ рукахъ геніальнаго изслѣдователя въ могущественное орудіе, и, такъ какъ Галилей первый догадался направить его на небесную сферу и вдохнулъ въ него жизнь, то онъ съ наибольшимъ правомъ можетъ быть названъ его изобрѣтателемъ тѣмъ болѣе, что ему одному удалось добиться значительнаго совершенства прибора [2]).

Послѣ невѣроятныхъ усилій онъ, наконецъ, успѣлъ устроить телескопъ, при помощи котораго сила глаза увеличивалась въ тридцать разъ. Нельзя себѣ представить всю степень любопытства, съ которою этотъ великій философъ въ первый разъ обратилъ свой телескопъ въ безконечность міроваго пространства. Естественно, что взоръ его долженъ былъ впервые остановиться на лунѣ,какъ на самомъ близкомъ и интересномъ свѣтилѣ, обращавшемъ уже давно на себя пытливое вниманіе людей. Философы древнихъ и среднихъ вѣковъ тщетно пытались объяснить себѣ физическое строеніе нашего спутника; одни, увлекаясь воображеніемъ, надѣляли его многолюдными городами; другіе, хотя и бездоказательно, утверждали, что на немъ есть горы, но въ то же время считали луну за обломокъ солнца, плавающій въ атмосферѣ, или даже за соединеніе зеркалъ, отражающихъ къ намъ солнечный свѣтъ. Галилей дѣйствительно увидѣлъ на лунѣ высокія горы, огромныя впадины и пропасти, похожія, по его выраженію, на пятна хвоста павлина; онъ замѣтилъ также тотъ моментъ, когда въ первую четверть луны, солнечный свѣтъ, позолотивъ вершины ея горъ, постепенно переходитъ къ освѣщенію ея равнинъ, мало по малу укорачивая падающую отъ горъ тѣнь. Проницательный умъ Галилея не ограничился одною только внѣшнею стороною своихъ открытій; онъ приложилъ къ опредѣленію высоты лунныхъ горъ строгій геометрическій методъ, состоящій въ измѣреніи длины отбрасываемыхъ ими тѣней. Далѣе онъ замѣтилъ, что, когда луна является въ видѣ узкаго серпа, то неосвѣщенная часть ея представляется намъ пепельнаго цвѣта, и совершенно вѣрно объяснилъ это явленіе отраженіемъ солнечныхъ лучей землею на лунную

[1]) Приборъ этотъ состоялъ изъ плосковогнутаго и плосковыпуклаго стекла и давалъ изображенія мнимыя, прямыя и увеличенныя.

[2]) По свидѣтельству Вивіани изслѣдованіе сферическихъ стеколъ привело Галилея къ открытію микроскопа. Въ подтвержденіе приводится письмо Галилея къ князю Чези отъ 23 сентября 1624 года. Ср. Maximilien Marie, Histoire des sciences math. et phys. T. III p. 116.

поверхность. Наблюдая постоянство пятенъ на видимой части поверхности луны, онъ пришелъ къ заключенію, что спутникъ нашъ обращенъ къ намъ всегда приблизительно одною и тою же стороной, и что полный оборотъ его вокругъ обитаемой нами планеты, совершается во время, равное полному обороту его на своей оси. Отъ вниманія Галилея не ускользнуло также періодическое колебаніе луны на ея оси (либрація), названное имъ «титубаціей», но слабая оптическая сила его трубы не позволяла ему подмѣтить законъ этого явленія, открытый позднѣе Доминикомъ Кассини.

Красивое звѣздное небо Италіи представляло обширное и богатое поле для наблюденій Галилея. Онъ направляетъ свою волшебную трубу на млечный путь, эту поэтическую грезу древняго міра, въ которомъ астрономы видѣли «спай двухъ полушарій». Галилей сейчасъ же убѣждается, что это ни что иное, «quam innumerarum stellarum coacervatim consitarum congeries»; въ созвѣздіи Плеядъ, гдѣ простой глазъ насчитываетъ 6—7 звѣздъ, онъ насчиталъ ихъ до 40; въ поясѣ и мечѣ Оріона, въ которыхъ древніе астрономы видѣли не болѣе 8 звѣздъ, Галилей нашелъ ихъ 80. Наблюдая по нѣскольку разъ эти звѣзды, онъ замѣтилъ, что, не смотря на увеличеніе числа, діаметры даже звѣздъ первой величины нисколько не увеличиваются. Эту повидимому странную особенность Галилей совершенно вѣрно объяснилъ тѣмъ, что сіяніе, окружающее всегда звѣзды, не позволяетъ различить ихъ очертанія, а слѣдовательно и лишаетъ возможности опредѣлить видимый ихъ діаметръ. Всѣми этими открытіями Галилей по привычкѣ своей тотчасъ же дѣлился со своими современниками. Важность, новизна и обиліе новыхъ наблюденій, а также желаніе распространить свои изслѣдованія среди возможно большаго круга читателей, побудили Галилея основать спеціальный органъ «Nuntius Sidereus», широковѣщательное заглавіе котораго должно было возбудить интересъ публики [1]).

7-го января 1610 года телескопъ въ первый разъ былъ направленъ на планету Юпитеръ [2]). Дискъ ея, чистаго, серебристобѣлаго цвѣта рѣзко обозначился; середину его пересѣкалъ рядъ темныхъ полосъ. Близъ самой планеты Галилей замѣтилъ три блестящія звѣздочки, которыя были невидимы для невооруженнаго глаза. Онъ тщательно замѣтилъ положеніе планеты относительно

---

[1]) Вотъ оно: «Sidereus nuntius, magna longeque admirabilia spectacula pandens suspiciendaque proponens unicuique praesertim vero philosophis atque astronomis, quae a Galileo Galileo, patricio Florentino, Patavini gymnasii publico mathematico, perspicilli nuper a se reperti beneficio sunt observata in Lunae facie, fixis innumeris, lacteo circulo, stellis nebulosis, apprime vero in quatuor planetis circa Iovis stellam disparibus intervallis atque periodis celeritate mirabili circumvolutis, quos nemini in Leone usque diem cognitos novissime auctor deprehendit primus atque Medicae sidera nuncupandos decrevit». (Изд. въ мартѣ 1610 г.)

[1]) Изложеніе жаркой полемики, завязавшейся по поводу открытій спутниковъ Юпитера завело бы насъ слишкомъ далеко. Мы позволимъ себѣ отослать желающихъ къ Favaro, op. cit. vol. I Cap. decimoterzo, гдѣ авторъ сопоставляетъ даже текстъ «Nuntius Sidereus» Галилея и «Mundus Jovialis» Симона Марія, который приписывалъ себѣ честь открытія спутниковъ Юпитера.

этихъ, какъ онъ думалъ, неподвижныхъ звѣздъ, которыми онъ заинтересовался только потому, что по нимъ представлялась возможность судить объ измѣненіи положенія Юпитера. На слѣдующую ночь, побуждаемый, какъ онъ самъ разсказываетъ, невѣдомою для него силой, онъ снова сосредоточилъ все свое вниманіе на той же планетѣ. Три блестящія звѣзды, замѣченныя наканунѣ, по прежнему находились въ полѣ его телескопа; но относительное положеніе ихъ другъ къ другу совершенно измѣнилось, и перемѣна эта была такого рода, что причиною ея никакъ не могло быть орбитное движеніе Юпитера. Удивленный и смущенный такой неожиданной перемѣною, великій астрономъ съ нетерпѣніемъ ждалъ наступленія слѣдующей ночи, чтобы разрѣшить загадочное явленіе. Но пасмурная погода разрушила его надежды. Четвертая ночь опять была ясная: изслѣдованія возобновились, и опять блестящіе спутники Юпитера измѣнили свое положеніе. Подозрѣнія Галилея оправдались; далѣе онъ не колебался и объявилъ, что эти блестящія звѣзды были луны, обращавшіяся вокругъ большой планеты, какъ вокругъ центра своего движенія. Нѣсколько послѣдующихъ наблюденій еще пояснили это явленіе; ибо найденъ былъ еще четвертый спутникъ, и тогда это удивительное открытіе было обнародовано.

Ни одно открытіе не было такъ важно, а главное такъ своевременно, какъ открытіе Юпитеровыхъ спутниковъ. Былъ открытъ тотъ новый міръ, который въ миніатюрѣ представляетъ нашу солнечную систему по теоріи Коперника. Поэтому защитники этой послѣдней привѣтствовали это открытіе съ величайшею радостью, тогда какъ закоснѣлые послѣдователи Птоломея упорно доказывали нелѣпость этихъ, по ихъ мнѣнію, мнимыхъ наблюденій. Такъ какъ телескопъ, говорили они, показываетъ намъ звѣзды во всѣхъ точкахъ неба, то это не что иное, какъ ложныя изображенія, которыя только кажутся существующими, но на самомъ дѣлѣ созданы самимъ инструментомъ, который искажаетъ видъ неба и болѣе скрываетъ его, нежели открываетъ. Былъ даже одинъ профессоръ въ Болоньѣ, который увѣрялъ, что видѣлъ три солнца въ одно и то же время[1]). Богъ, продолжали они, ничего не создаетъ безъ цѣли, и вселенная, какъ никто въ томъ не сомнѣвается, создана для человѣка; къ чему же могутъ служить такія планеты, какъ «Медичійскія звѣзды»[2]). Находясь внѣ предѣловъ человѣческаго зрѣнія и осужденные бездѣйствовать вслѣдствіе своей незначительной величины, онѣ и должны оставаться и мнимыми, и бездѣйствующими».—«Въ этомъ виновата природа, а не я, отвѣчалъ Галилей, и притомъ какъ мы можемъ осмѣлиться отрицать ихъ значеніе въ великомъ механизмѣ небеснаго пространства?».—«Существуетъ, вѣдь, только семь металловъ, возражали ему; въ головѣ животныхъ семь оконъ (глаза, ноздри, уши, ротъ), чрезъ которыя воздухъ вступаетъ въ храмину тѣла, дабы нагрѣвать, освѣщать и питать ее. Если семь частей въ микрокосмѣ, то

[1]) *Ассоновъ* Галилей и Ньютонъ. Москва. 1871, стр. 30.

[2]) Такъ были названы въ честь Тосканскаго Герцога спутники Юпитера.

столько же должно быть и въ макрокосмѣ, что и подтверждается дѣйствительностью: имѣются двѣ благопріятныя звѣзды—Юпитеръ и Венера, двѣ неблагопріятныя—Марсъ и Сатурнъ, двѣ свѣтлыя—солнце и луна, и одна неопредѣленная и посредственная звѣзда—Меркурій; далѣе, подсвѣчникъ въ храмѣ Соломона имѣлъ только семь вѣтвей; всѣ народы дѣлятъ недѣлю на семь дней и т. д. Если увеличить число планетъ, то вся эта система нарушится, да и какъ допустить, чтобы въ небѣ существовали планеты, которыхъ не зналъ Птоломей!»

Открывъ спутниковъ Юпитера, Галилей тотчасъ же задался мыслью примѣнить ихъ къ практическимъ цѣлямъ. Онъ предложилъ воспользоваться движеніемъ и затмѣніемъ ихъ для опредѣленія долготъ на морѣ и составилъ даже таблицы, опредѣляющія моменты исчезновеній и появленій спутниковъ. Затѣмъ Галилей направилъ свое вниманіе на Сатурна, но слабыя трубы знаменитаго флорентинца, не смотря на всѣ его усилія, не дали ему однако возможности открыть причину занимавшаго его явленія—кольца Сатурна.

Скоро послѣдовало другое открытіе, которое, по предсказанію глубокомысленнаго Коперника, должно было рано или поздно сдѣлаться доступнымъ взорамъ человѣка. Послѣдователи Птоломея справедливо указывали, что, если бы Венера дѣйствительно обращалась вокругъ солнца, какъ утверждалъ торнскій отшельникъ, и отражала къ намъ свѣтъ этого свѣтила, то она необходимо должна была бы имѣть такія же фазы, какія имѣетъ луна. Но такъ какъ такія фазы не были видимы невооруженнымъ глазомъ, то возраженіе это сохраняло всю свою силу, противъ которой нельзя было противопоставить никакихъ доводовъ. Галилею суждено было снова, такъ сказать, выручить систему Коперника и привести въ подтвержденіе ея доказательство столь положительное, что никакое сомнѣніе не могло устоять противъ него. Это доказательство заключалось въ открытіи фазъ Венеры.

Подвинувъ столь значительно рѣшеніе вопросовъ мірозданья, Галилей не могъ не сознавать своего превосходства надъ окружавшей его средой. Быть можетъ оно то и было причиной того самохваленія, съ которымъ онъ обыкновенно отзывался о своихъ изслѣдованіяхъ и открытіяхъ. Положеніе, занимаемое имъ въ эту пору его жизни, дѣйствительно было выдающееся. Поэты воспѣвали его геній въ стихахъ, а въ обществѣ только и были заняты, что разговорами о необыкновенныхъ его открытіяхъ. Коронованныя особы просили его назвать ихъ именемъ какую-нибудь изъ новооткрытыхъ звѣздъ,—и вообще все современное Галилею общество, не смотря на низкую степень своего образованія, относилось сочувственно къ его открытіямъ. И если бы не вмѣшательство его отечественныхъ ученыхъ и богослововъ, видѣвшихъ или же изъ личныхъ счетовъ желавшихъ видѣть въ его ученіи притязаніе на ниспроверженіе авторитетовъ церкви и религіи, обозленныхъ страстностью, уничтоженныхъ остроуміемъ и завидовавшихъ высокому общественному положенію своего соперника,—

если бы не это вмѣшательство, поднявшее цѣлую бурю споровъ Галилею быть можетъ не пришлось бы такъ печально закончить свое земное существованіе.

Несмотря однако на завистливую злобу враговъ, Галилей, живя подъ покровительствомъ сравнительно независимой Венеціи, не терпѣлъ особенныхъ притѣсненій. Любовь ли къ родинѣ, въ которой онъ не былъ уже 18 лѣтъ, но вернуться въ которую онъ все время лелѣялъ надежду; желаніе ли освободиться отъ обязательныхъ лекцій и тяготившихъ его частныхъ уроковъ, чтобы на досугѣ заняться обработкой накопившагося матеріала; честолюбивые-ли, наконецъ, замыслы, какъ предполагаетъ Фаваро, какъ бы то ни было, но онъ поддался льстивому приглашенію Козьмы II Медичи, великаго герцога Тосканскаго—переселиться обратно на свою родину, во Флоренцію и принять на себя титулъ перваго математика и философа при великогерцогскомъ дворѣ. Несмотря на просьбы и предостереженія истинныхъ друзей, Галилей покинулъ Падуу и въ сентябрѣ мѣсяцѣ 1610 года переселился во Флоренцію. На первыхъ порахъ обстановка жизни знаменитаго философа складывалась чрезвычайно благопріятно: онъ спокойно продолжалъ работать, и плодомъ его трудовъ до 1611 года были тѣ наблюденія о фазахъ Венеры, о которыхъ мы уже упомянули выше.

(Окончаніе слѣдуетъ)

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ОБЪЕМОВЪ УСѢЧЕННЫХЪ ПРИЗМЪ.

Въ курсахъ Элементарной Геометріи обыкновенно мало говорится объ опредѣленіи объемовъ усѣченныхъ многоугольныхъ призмъ. Можетъ быть, читателямъ не безъинтересно будетъ припомнить или узнать нѣкоторыя теоремы объ усѣченныхъ призмахъ и новыя ихъ доказательства.

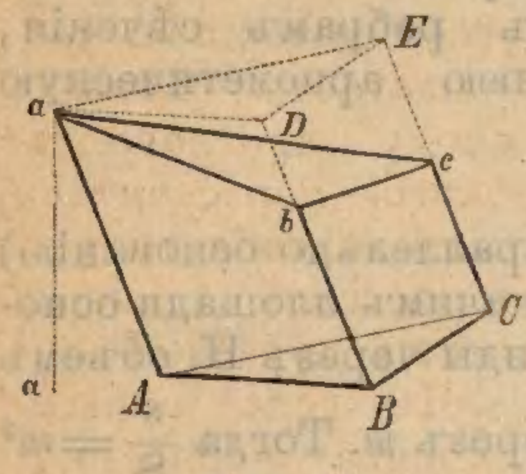
Лемма I. Объемъ треугольной призмы равняется половинѣ произведенія площади боковой стороны на длину перпендикуляра, опущеннаго на нее изъ какой нибудь точки противоположнаго ребра.

Вообразимъ треугольную призму, у которой нижнее ооснованіе ABC и верхнее abc. Изъ точекъ A и B проводимъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя прямымъ BC и AC. Пусть эти прямыя пересѣкаются въ точкѣ D. Точно также положимъ, что прямыя, проведенныя изъ точекъ a и b параллельно bc и ac, пересѣкаются въ точкѣ d. Соединимъ точки D и d прямою. Проведенныя нами прямыя вмѣстѣ съ нѣкоторыми ребрами призмы ограничиваютъ два треугольника и два параллелограмма, которые въ свою очередь вмѣстѣ со сторонами призмы ограничиваютъ параллелепипедъ. Объемъ этого параллелепипеда равенъ произведенію площади BCcb на перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки ребра Aa на плоскость Bc. Объемъ данной треугольной призмы будетъ равняться половинѣ этого произведенія.

Теорема II. Объемъ усѣченной треугольной призмы равняется площади основанія, умноженной на среднюю ариѳметическую боко-

выхъ реберъ и дѣленной на отношеніе какого нибудь ребра къ перпендикуляру, опущенному изъ вершины этого ребра на плоскость основанія.

Положимъ, что Aa есть наибольшее боковое ребро усѣченной треугольной призмы. Опустимъ перпендикуляръ $a\alpha$ изъ точки a на плоскость ABC. Длину его обозначимъ черезъ H, площадь основанія ABC черезъ S, длину перпендикуляра, опущеннаго изъ какой нибудь точки ребра Aa на плоскость Bc, обозначимъ черезъ h, высоту трапеціи $BbcC$ черезъ p, объемъ усѣченной призмы $ABCabc$ черезъ v. Изъ точки a проводимъ прямыя, параллельныя AB и AC до пересѣченія съ ребрами Bb и Cc въ точкахъ D и E. Точки D и E соединимъ прямою (фиг. 54). Тогда объемъ усѣченной призмы v будетъ представлять разность объемовъ призмы $ABCaDE$ и четыреугольной пирамиды $aDbcE$. Обозначивъ два послѣдніе объема соответственно черезъ v_1 и v_2, находимъ $v=v_1-v_2, v_1=SH$ или по предъидущей леммѣ



Фиг. 54.

$$v_1=\frac{1}{2}\text{пл. BE}.\ h=\frac{1}{2}\,\overline{Aa}.\ ph,$$

$$v_2=\frac{1}{3}\,h.\ \text{пл.}\ bE=\frac{1}{3}\,h.\frac{\overline{Db}+\overline{Ec}}{2}.p.$$

Такимъ образомъ

$$v=\frac{hp}{6}(3\overline{Aa}-\overline{Db}-\overline{Ec}).$$

Но $\overline{Aa}-\overline{Db}=\overline{DB}-\overline{Db}=\overline{Bb}$, $\overline{Aa}-\overline{Ec}=\overline{Cc}$. Слѣдовательно,

$$v=\frac{1}{6}\,hp\,(Aa+Bb+Cc).$$

Такъ какъ $SH=\frac{1}{2}\,hp\,.\,Aa$, то

$$v=\frac{SH}{3\overline{Aa}}\,(\overline{Aa}+\overline{Bb}+\overline{Cc})=S.\frac{\overline{Aa}+\overline{Bb}+\overline{Cc}}{3}:\frac{\overline{Aa}}{\overline{a\alpha}}.$$

Опустивъ перпендикуляры $b\beta$ и $c\gamma$ на плоскость ABC и проведя прямыя $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, находимъ изъ подобія треугольниковъ $Aa\alpha$, $Bb\beta$, $Cc\gamma$.

$$\frac{Aa}{a\alpha}=\frac{Bb}{b\beta}=\frac{Cc}{c\gamma}.$$

Слѣдствіе 1. Выраженіе для v можно представить въ видѣ

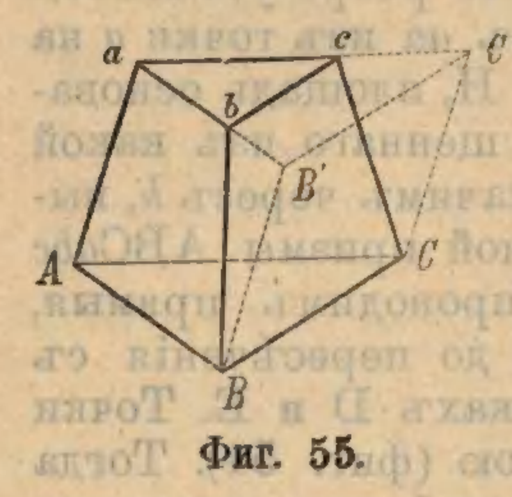
$$v=\frac{S}{3}\left(\overline{Aa}.\ \frac{a\alpha}{Aa}+\overline{Bb}.\ \frac{a\alpha}{Aa}+\overline{Cc}.\ \frac{a\alpha}{Aa}\right)$$

или

$$v=\frac{S}{3}\left(\overline{Aa}.\ \frac{a\alpha}{Aa}+\overline{Bb}.\ \frac{b\beta}{Bb}+\overline{Cc}.\ \frac{c\gamma}{Cc}\right)=\frac{S}{3}(\overline{a\alpha}+\overline{b\beta}+\overline{c\gamma}).$$

Эта формула выражаетъ извѣстную теорему объ объемѣ усѣченной треугольной призмы.

Слѣдствіе 2. Для прямой усѣченной треугольной призмы $Aa=a\alpha$, $Bb=b\beta$, $Cc=c\gamma$. Всякую непрямую усѣченную треугольную призму



Фиг. 55.

можно раздѣлить на двѣ прямыхъ усѣченныхъ призмы плоскостью, перпендикулярною къ боковымъ ребрамъ. Послѣ этого не трудно видѣть, что объемъ всякой усѣченной треугольной призмы равняется площади перпендикулярнаго къ ребрамъ сѣченія, умноженной на среднюю ариѳметическую реберъ.

Слѣдствіе 3. Вообразимъ усѣченную (параллельно основанію) треугольную пирамиду $ABCabc$ (фиг. 55). Обозначимъ площади основаній ABC и abc черезъ S и s, высоту пирамиды черезъ H, объемъ ея черезъ v, каждое изъ отношеній $\frac{ab}{AB}$, $\frac{bc}{BC}$ черезъ m. Тогда $\frac{s}{S}=m^2$ и $m=\sqrt{\frac{s}{S}}$. Изъ точекъ B и C проводимъ прямыя, параллельныя Aa, до пересѣченія съ продолженіями ab и ac въ точкахъ B' и C'. Проводимъ прямую $B'C'$. Обозначимъ площадь параллелограмма $ABB'a$ черезъ u, объемъ призмы $ABCaB'C'$ черезъ v_1 и объемъ усѣченной призмы $BB'bCC'c$ черезъ v_2. Опустимъ изъ точки C перпендикуляръ на плоскость Ab и обозначимъ длину его черезъ h. Тогда по предыдущимъ леммѣ и теоремѣ

$$v_1=\frac{1}{2}uh,\ \ v_2=\frac{\text{пл. } BbB'.\,h}{3\overline{BC}}(\overline{BC}+\overline{B'C'}+\overline{bc}).$$

$$\text{Но пл. } BbB' : u = bB' : 2\,\overline{aB'}=(\overline{AB}-\overline{ab}) : 2\,\overline{AB}$$

$$\text{или пл. } BbB'=u.\frac{\overline{AB}-\overline{ab}}{2\overline{AB}}=\frac{1}{2}u\ (1-m),$$

$$(\overline{BC}+\overline{B'C'}+\overline{bc}) : \overline{BC} = 2+m.$$

Слѣдовательно,

$$v_2=\frac{1}{6}uh\,(1-m)(2+m)$$

и

$$v=v_1-v_2=\frac{1}{6}uh\,[3-(1-m)(2+m)]=\frac{1}{6}uh(1+m+m^2).$$

Объемъ v_1 равенъ также SH. Поэтому $\frac{1}{2}uh=SH$, откуда $v=\frac{SH}{3}(1+m+m^2)$ или

$$v=\frac{H}{3}S\left(1+\sqrt{\frac{s}{S}}+\frac{s}{S}\right)=\frac{H}{3}(S+\sqrt{Ss}+s).$$

Эта формула выражаетъ извѣстную теорему относительно объема усѣченной треугольной пирамиды.

Вообразимъ многоугольную усѣченную (параллельно основанію) пирамиду. Діагональныя плоскости раздѣлятъ эту пирамиду на треугольныя усѣченныя пирамиды, а основанія ея на треугольники. Обозначимъ площади треугольниковъ, на которые дѣлится нижнее основаніе, черезъ S_1, S_2, S_3,..., а площади нижняго и верхняго основаній черезъ S и s. Тогда объемъ многоугольной усѣченной пирамиды будетъ равенъ

$$\frac{1}{3} S_1H (1+m+m^2) + \frac{1}{3} S_2H (1+m+m^2) + \frac{1}{3} S_3H (1+m+m^2) + \ldots,$$

гдѣ H есть высота пирамиды, а m есть отношеніе сходственныхъ сторонъ верхняго и нижняго основаній. Упрощая эту сумму, находимъ

$$\frac{H}{3} (1+m+m^2) (S_1+S_2+S_3+\ldots) = \frac{HS}{3} (1+m+m^2) = \frac{H}{3} (S+\sqrt{Ss}+s).$$

Слѣдствіе 4. При выводѣ теоремы мы имѣли формулу

$$v = \frac{1}{2} hp. \frac{Aa + Bb + Cc}{3}.$$

Она выражаетъ слѣдующую лемму: объемъ треугольной усѣченной призмы равенъ средней ариѳметической боковыхъ реберъ, умноженной на половину произведенія разстоянія двухъ боковыхъ реберъ на перпендикуляръ къ плоскости ихъ, проведенный изъ какой нибудь точки третьяго ребра.

Опредѣленіе. Понтономъ называется многогранникъ, у котораго основанія суть прямоугольники, а боковыя стороны трапеціи. Понтонъ представляетъ четыреугольную усѣченную призму, боковыя ребра которой суть стороны прямоугольниковъ.

Задача. Опредѣлить объемъ понтона ABCDEFGH, высота котораго есть h, стороны AB и BC нижняго основанія ABCD суть a и b и стороны EF и FG верхняго основанія равны a' и b'.

Проведя діагональную плоскость CFED, раздѣлимъ понтонъ на двѣ усѣченныхъ треугольныхъ призмы BCFADE и FGCEHD. Разстояніе реберъ AB и DC первой призмы есть b, разстояніе третьяго ея ребра EF отъ плоскости двухъ первыхъ есть h, средняя ариѳметическая ея реберъ есть $\frac{2a + a'}{3}$. Разстояніе реберъ EF и HG второй призмы есть b', разстояніе третьяго ребра DC отъ плоскости EG есть h и средняя ариѳметическая реберъ равна $\frac{2a' + a}{3}$. Такимъ образомъ по слѣдствію 4 изъ предыдущей теоремы находимъ для объема понтона слѣдующее выраженіе

$$\frac{hb}{6} (2a + a') + \frac{hb'}{6} (2a' + a),$$

которое тождественно равно другому

$$\frac{ha}{6} (2b + b') + \frac{ha'}{6} (2b' + b).$$

Подобнымъ-же образомъ опредѣляется объемъ тѣла, основанія котораго суть параллелограммы, а боковыя стороны трапеціи.

Теорема III. Объемъ усѣченнаго параллелепипеда равенъ тремъ четвертямъ суммы объемовъ четырехъ пирамидъ, имѣющихъ основаніе общее съ параллелепипедомъ и вершины въ вершинахъ его сѣченія.

Діагональная плоскость AC*ca* дѣлитъ усѣченный параллелепипедъ ABCD*abcd* на двѣ усѣченныхъ треугольныхъ призмы ABC*abc* и ADC*adc*. Обозначивъ площадь основанія ABCD черезъ S и перпендикуляръ $a\alpha$ на основаніе черезъ H, находимъ для объемовъ этихъ призмъ слѣдующія выраженія

$$\frac{SH}{2\overline{Aa}}.\frac{\overline{Aa}+\overline{Bb}+\overline{Cc}}{3} \text{ и } \frac{SH}{2\overline{Aa}}.\frac{\overline{Aa}+\overline{Dd}+\overline{Cc}}{3}.$$

Такимъ образомъ объемъ v усѣченнаго параллелепипеда будетъ равенъ

$$\frac{SH}{2\overline{Aa}}.\frac{2\overline{Aa}+2\overline{Cc}+\overline{Bb}+\overline{Dd}}{3}.$$

Обозначимъ черезъ E точку пересѣченія діагоналей AC и BD и черезъ e пересѣченіе діагоналей ac и bd. Проводимъ прямую Ee. Такъ какъ $abcd$ есть параллелограммъ, то $2\overline{Ee}=\overline{Aa}+\overline{Cc}=\overline{Bb}+\overline{Dd}$.

Слѣдовательно, $v=\frac{SH}{2\overline{Aa}}(\overline{Aa}+\overline{Cc})$ или

$$v=S.\frac{\overline{Aa}+\overline{Bb}+\overline{Cc}+\overline{Dd}}{4}.\frac{H}{\overline{Aa}}.$$

Опустивъ перпендикуляры $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ на основаніе, находимъ

$$a\alpha:\mathrm{A}a=b\beta:\mathrm{B}b=c\gamma:\mathrm{C}c=d\delta:\mathrm{D}d.$$

Слѣдовательно,

$$v=S.\frac{1}{4}(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)$$

или

$$v=\frac{3}{4}\left(\frac{S.a\alpha}{3}+\frac{S.b\beta}{3}+\frac{S.c\gamma}{3}+\frac{S.d\delta}{3}\right).$$

Теорема IV. Объемъ усѣченной многоугольной призмы, у которой основаніе есть правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ, равняется площади основанія, умноженной на перпендикуляръ, опущенный на основаніе изъ точки пересѣченія плоскости сѣченія съ прямою, проведенною черезъ центръ основанія параллельно ребрамъ.

Вообразимъ призму $A_1A_2A_3\ldots A_n\ a_1a_2\ldots a_n$, у которой основаніе $A_1A_2\ldots A_n$ есть правильный многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ. Черезъ центръ основанія 0 проводимъ прямыя $0A_1$,

$OA_2, \ldots OA_n$. Прямая, проведенная черезъ точку O параллельно ребрамъ, пересѣкаетъ верхнее сѣченіе въ нѣкоторой точкѣ o. Проводимъ прямыя oa_1, oa_2, $oa_3, \ldots oa_n$. Обозначивъ площадь основанія усѣченной призмы черезъ S, находимъ, что площадь каждаго изъ треугольниковъ A_1OA_2, $A_2OA_3, \ldots A_n OA_1$ равна $\frac{S}{n}$. Объемы призмъ

$A_1OA_2a_1oa_2$, $A_2OA_3a_2oa_3, \ldots A_nOA_1a_noa_1$ соотвѣтственно равны

$$\frac{S}{n} \cdot \frac{1}{3}(Oo + A_1a_1 + A_2a_2) \cdot \frac{H}{Oo};\ \frac{S}{n} \cdot \frac{1}{3}(Oo + A_2a_2 + A_3a_3) \cdot \frac{H}{Oo}, \ldots$$

$$\frac{S}{n} \cdot \frac{1}{3}(Oo + A_na_n + A_1a_1) \cdot \frac{H}{Oo},$$

гдѣ H есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ o на основаніе. Объемъ многоугольной призмы v будетъ

$$\frac{S}{n} \cdot \frac{1}{3}(n \cdot Oo + 2A_1a_1 + 2A_2a_2 + \ldots + 2A_na_n)\frac{H}{Oo}.$$

Вершины основанія будутъ попарно находиться на прямой, проходящей черезъ точку O. Напримѣръ, 1-ая и $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-ая, 2-ая и $\left(\frac{n}{2}+2\right)$-ая и т д. Поэтому $A_1a_1 + A_{\frac{n}{2}+1}a_{\frac{n}{2}+1} = 2Oo$, $A_2a_2 + A_{\frac{n}{2}+2}a_{\frac{n}{2}+2} = 2Oo$ и т. д. Складывая почленно эти $\frac{n}{2}$ равенства, находимъ $A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + \ldots + A_na_n = n \cdot Oo$. Слѣдовательно, $v = SH$.

Обобщеніе. Для обобщенія этой теоремы необходимо воспользоваться нѣкоторыми свойствами центра тяжести плоскихъ фигуръ. Обозначимъ центры тяжести основаній треугольной усѣченной призмы черезъ G и g. Эти точки опредѣляются пересѣченіемъ медіанъ треугольниковъ ABC и abc. Такъ какъ боковыя стороны усѣченной треугольной призмы суть трапеціи, а во всякой трапеціи прямая, соединяющая средины непараллельныхъ сторонъ, параллельна другимъ сторонамъ и равна ихъ полусуммѣ, и такъ какъ кромѣ того прямая Gg дѣлитъ соотвѣтственныя медіаны основаній въ одномъ отношеніи 2:1, то не трудно убѣдиться, что прямая Gg параллельна боковымъ ребрамъ и равна средней ариѳметической реберъ. Такимъ образомъ объемъ усѣченной треугольной призмы равенъ площади перпендикулярнаго къ ребрамъ сѣченія, умноженной на прямую, соединяющую центры тяжести обоихъ основаній.

Вообразимъ многоугольную усѣченную призму. Пересѣчемъ ее плоскостью, перпендикулярною къ ребрамъ, и проведемъ діагональныя плоскости. Онѣ раздѣлятъ многоугольную призму на треугольныя, а основанія ея и сѣченіе—на треугольники. Обозначимъ пло-

щади треугольниковъ, на которые раздѣлено сѣченіе, черезъ S_1, S_2, S_3,..., центры тяжести треугольниковъ, на которые раздѣлено нижнее основаніе, черезъ $G_1, G_2, G_3, \ldots$, центры тяжести треугольниковъ верхняго основанія черезъ $g_1, g_2, g_3, \ldots$, площадь сѣченія черезъ S, центры тяжести нижняго и верхняго основаній черезъ G и g. Тогда объемъ v многоугольной усѣченной призмы выразится слѣдующимъ образомъ $S_1.\overline{G_1g_1}+S_2.\overline{G_2g_2}+S_3.\overline{G_3g_3}+\ldots$

По свойству центра тяжести эта сумма равна $S.\ \overline{Gg}$. Слѣдовательно, $v=S.\ \overline{Gg}$. Замѣтимъ, что прямая Gg параллельна ребрамъ. Опустивъ перпендикуляръ $g\gamma$ на нижнее основаніе и обозначивъ площадь этого основанія черезъ σ, находимъ $S:\sigma=g\gamma.\ Gg$. Отсюда $S.\ \overline{Gg}=\sigma.\ \overline{g\gamma}$.

Послѣ этого мы можемъ высказать слѣдующую общую теорему: объемъ усѣченной призмы или усѣченнаго цилиндра равенъ площади основанія, умноженной на перпендикуляръ, опущенный на это основаніе изъ центра тяжести другого основанія.

П. Сѣтшиковъ (Троицкъ).

Разложеніе квадратнаго трехчлена ax^2+bx+c съ цѣлыми коэффиціентами на два линейные сомножителя съ цѣлыми коэффиціентами.

Непосредственнымъ умноженіемъ легко убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ восьми тождествъ:

$$(kx+m)(lx+n)=klx^2+(lm+kn)x+mn,$$

$$(kx-m)(lx-n)=klx^2-(lm+kn)x+mn,$$

$$(kx+m)(lx-n)=klx^2+(lm-kn)x-mn,$$

$$(kx-m)(lx+n)=klx^2-(lm-kn)x-mn,$$

$$(-1)(kx+m)(lx+n)=-klx^2-(lm+kn)x-mn,$$

$$(-1)(kx-m)(lx-n)=-klx^2+(lm+kn)x-mn,$$

$$(-1)(kx+m)(lx-n)=-klx^2-(lm-kn)x+mn,$$

$$(-1)(kx-m)(lx+n)=-klx^2+(lm-kn)x+mn.$$

Вторыя части этихъ тождествъ представляютъ квадратные относительно x трехчлены вида ax^2+bx+c, первые же ихъ части даютъ разложенія этихъ трехчленовъ на два линейные сомножителя.

Пусть k, m, l и n обозначаютъ цѣлыя абсолютныя числа и пусть $lm>kn$; въ такомъ случаѣ kl, mn, $lm+kn$ и $lm-kn$ будутъ также цѣлыя абсолютныя числа. Разсматривая внимательно вторыя части предыдущихъ восьми тождествъ и замѣчая, что $lm.\ kn=kl.\ mn$, можно вывести слѣдующій **признакъ разложимости квадратнаго трехчлена съ цѣлыми коэффиціентами на два линейные сомножителя съ цѣлыми коэффиціентами:**

Квадратный относительно x трехчленъ, вида ax^2+bx+c, съ цѣлыми коэффиціентами можетъ быть разложенъ на два линейные сомножителя съ цѣлыми коэффиціентами, если абсолютная величина его средняго коэффиціента можетъ быть представлена, когда у крайнихъ коэффиціентовъ одинаковые знаки, въ видѣ суммы, и когда знаки различные, въ видѣ разности двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыхъ произведеніе равнялось бы произведенію абсолютныхъ величинъ крайнихъ коэффиціентовъ.

Какъ располагать вычисленія, чтобы, пользуясь вышеприведеннымъ признакомъ, узнать, разлагается или не разлагается на двѣ линейные сомножителя съ цѣлыми коэффиціентами данный трехчленъ, и какъ выполнить самое разложеніе, когда оно возможно, это легче всего понять на примѣрахъ.

Примѣръ I. *Требуется разложить на два линейные сомножителя съ цѣлыми коэффиціентами трехчленъ:*

$$21x^2-41x+10.$$

Находимъ произведеніе абсолютныхъ величинъ крайнихъ коэффиціентовъ:

$$21.10=210.$$

Такъ какъ знаки у крайнихъ коэффиціентовъ одинаковые, то пробуемъ абсолютную величину средняго коэффиціента, т. е. число 41, представить въ видѣ суммы двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыхъ произведеніе равнялось бы произведенію абсолютныхъ величинъ крайнихъ коэффиціентовъ, т. е. числу 210. Это можно выполнить двумя способами:

1-ый способъ. Представляемъ число 41 въ видѣ всевозможныхъ суммъ двухъ цѣлыхъ чиселъ, принимая за первое изъ слагаемыхъ послѣдовательно числа 1, 2, 3, 4, 5 и т. д., и находимъ произведеніе каждой пары слагаемыхъ. Вычисленіе располагаемъ такъ:

$41=1+40$.	$40.1=40$;
$41=2+39$,	$39.2=78$;
$41=3+38$,	$38.3=114$;
$41=4+37$,	$37.4=148$;
$41=5+36$,	$36.5=180$;
$41=6+35$,	$35.6=210$.

Здѣсь останавливаемся, ибо получили произведеніе, равное числу 210.

2-ой способъ. Представляемъ число 210 въ видѣ всевозможныхъ произведеній двухъ цѣлыхъ чиселъ, принимая за первый изъ сомножителей послѣдовательно тѣ изъ чиселъ 1, 2, 3, 4, 5 и т. д., на которыя число 210 дѣлится нацѣло; въ то же время находимъ сумму каждой пары сомножителей. Вычисленіе располагаемъ такъ:

$$210=1.210, \qquad 210+1=211;$$

$$210=2.105, \qquad 105+2=107;$$

$$210=3.70, \qquad 70+3=73;$$

$$210=5.42, \qquad 42+5=47;$$

$$210=6.35, \qquad 35+6=41.$$

Здѣсь останавливаемся, ибо получили сумму, равную числу 41. Итакъ $41=6+35$; слѣдовательно

$$21x^2-41x+10=21x^2-(6+35)x+10=$$

$$=21x^2-(6x+35x)+10=21x^2-6x-35x+10=$$

$$=(21x^2-6x)-(35x-10)=3x(7x-2)-5(7x-2)=$$

$$=(7x-2)(3x-5).$$

Примѣръ II. *Требуется разложить на два линейные сомножителя съ цѣлыми коэффиціентами трехчленъ:*

$$15x^2-49x-22.$$

Находимъ произведеніе абсолютныхъ величинъ крайнихъ коэффиціэнтовъ:

$$15.22=330.$$

Такъ какъ знаки у крайнихъ коэффиціентовъ различные, то стараемся представить абсолютную величину средняго коэффиціента, т. е. число 49, въ видѣ разности двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыхъ произведеніе равнялось бы произведенію абсолютныхъ величинъ крайнихъ коэффиціентовъ, т. е. числу 330. Это можно выполнить, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, двумя способами:

1-ый способъ. Представляемъ число 49 въ видѣ всевозможныхъ разностей двухъ цѣлыхъ чиселъ, принимая за вычитаемое послѣдовательно числа 1, 2, 3, 4, 5 и т. д., и находимъ произведеніе уменьшаемаго и вычитаемаго каждой разности. Вычисленіе располагаемъ такъ:

$$49=50-1, \qquad 50.1=50;$$

$$49=51-2, \qquad 51.2=102;$$

$$49=52-3, \qquad 52.3=156;$$

$$49=53-4, \qquad 53.4=212;$$

$$49=54-5, \qquad 54.5=270;$$

$$49=55-6, \qquad 55.6=330.$$

Здѣсь останавливаемся, ибо получили произведеніе, равное числу 330.

2-ой способъ. Представляемъ число 330 въ видѣ всевозможныхъ произведенiй двухъ цѣлыхъ чиселъ, какъ это дѣлали съ числомъ 210 въ 1-омъ примѣрѣ, и находимъ разность каждой пары сомножителей. Вычисленiе располагаемъ такъ:

$$330=1.330, \qquad 330-1=329;$$

$$330=2.165, \qquad 165-2=163;$$

$$330=3.110, \qquad 110-3=107;$$

$$330=5.66, \qquad 66-5=61;$$

$$330=6.55, \qquad 55-6=49.$$

Здѣсь останавливаемся, ибо получили разность, равную числу 49.

$$15x^2-49x-22=15x^2-(55-6)x-22=$$

$$=15x^2-(55x-6x)-22=15x^2-55x+6x-22=$$

$$=(15x^2-55x)+(6x-22)=5x(3x-11)+2(3x-11)=$$

$$=(3x-11)(5x+2).$$

Примѣръ III. *Требуется разложить на два линейные сомножителя съ цѣлыми коэффицiентами трехчленъ:*

$$4x^2-7x-6.$$

Находимъ произведенiе абсолютныхъ величинъ крайнихъ коэффицiентовъ:

$$4.6=24.$$

Такъ какъ знаки у крайнихъ коэффицiентовъ различные, то поступаемъ, какъ во II-омъ примѣрѣ.

1-ый способъ.

$$7=8-1, \qquad 8.1=8;$$

$$7=9-2, \qquad 9.2=18;$$

$$7=10-3, \qquad 10.3=30.$$

Очевидно, что ни одно изъ произведенiй не будетъ равно числу 24.

2-й способъ.

$$24=1.24, \qquad 24-1=23;$$

$$24=2.12, \qquad 12-2=10;$$

$$24=3.8, \qquad 8-3=5.$$

Очевидно, что ни одна изъ разностей не будетъ равна числу 7.

Оба способа указываютъ на невозможность задачи.

Примѣръ IV. *Требуется разложить на два линейные сомножителя съ цѣлыми коэффиціентами трехчленъ:*

$$-6x^2+11x+10.$$

Находимъ произведеніе абсолютныхъ величинъ крайнихъ коэффиціентовъ:

$$6.10=60.$$

Такъ какъ знаки у крайнихъ коэффиціентовъ различные, то пробуемъ представить число 11 въ видѣ разности двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыхъ произведеніе равнялось бы числу 60.

Поступая, какъ во II-омъ примѣрѣ, находимъ, что

$$11=15-4, \qquad 15.4=60.$$

Убѣдившись въ возможности разложенія даннаго трехчлена на два линейные сомножителя съ цѣлыми коэффиціентами, можемъ самое разложеніе выполнить двумя способами.

Можемъ вывести -1 за скобки:

$$-6x^2+11x+10=(-1)(6x^2-11x-10);$$

$$6x^2-11x-10=6x^2-(15-4)x-10=$$

$$=6x^2-(15x-4x)-10=6x^2-15x+4x-10=$$

$$=(6x^2-15x)+(4x-10)=3x(2x-5)+2(2x-5)=$$

$$=(2x-5)(3x+2);$$

$$-6x^2+11x+10=(-1)(2x-5)(3x+2).$$

Можемъ переставить крайніе члены:

$$-6x^2+11x+10=10+11x-6x^2=$$

$$=10+(15-4)x-6x^2=10+(15x-4x)-6x^2=$$

$$=10+15x-4x-6x^2=(10+15x)-(4x+6x^2)=$$

$$=5(2+3x)-2x(2+3x)=(2+3x)(5-2x).$$

Полагаю, что этихъ примѣровъ будетъ достаточно.

Подобно трехчленамъ вида ax^2+bx+c можно разлагать и трехчлены вида x^2+px+q, замѣчая, что

$$x^2+px+q=1.x^2+px+q.$$

При составленіи этой статьи я пользовался слѣдующими двумя источниками:

1) *Н. Вальцовъ.* Замѣтка о разложеніи на множителей трехчленовъ второй степени. В. О. Ф. и Э. М. IX сем. № 8, стран.: 152—153.

2) Lehrbuch der Gleichungen des 2 Grades mit einer Unbekannten (Quadrat. Gleichungen). Bearbeitet nach *System Kleyer* von *Dr. Aug. Blind.* Stuttgart. 1891. S.: 191—195. Erkl.: 345, 346, 348, 352.

Учит. Варш. реальн. учил. *С. Гирманъ.*

ЗАДАЧИ.

№ 423. На сторонахъ прямоугольнаго треугольника построены внѣшніе квадраты. Называя центръ квадрата, построеннаго на гипотенузѣ BC, черезъ x, на катетѣ AC — черезъ y и на катетѣ AB—черезъ z, показать, что

1) прямая Ax равна и перпендикулярна zy,

2) треугольникъ xyz равномѣренъ четыреугольнику $ABxC$,

3) прямыя, соединяющія вершины треугольника съ центрами квадратовъ, построенныхъ на противоположныхъ сторонахъ, пересѣкаются въ одной точкѣ,

4) прямая, соединяющая вершину остраго угла съ центромъ квадрата, построеннаго на катетѣ, противолежащемъ этому углу, равна прямой, соединяющей центръ квадрата, построеннаго на гипотенузѣ, съ центромъ квадрата, построеннаго на другомъ катетѣ.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 424. Показать, что если n—цѣлое не кратное трехъ число, то $n^{13}-n$ дѣлится на $2^{13}-2$.

(Заимств.) *П. П.* (Одесса).

№ 425. Стороны четыреугольника равны по порядку a, b, c, d. Проведены четыре окружности: первая касается стороны a и продолженій сторонъ d и b, вторая—стороны b и продолженій сторонъ a и c, третья—стороны c и продолженій сторонъ b и d, четвертая—стороны d и продолженій сторонъ c и a. Радіусы этихъ окружностей обозначены по порядку черезъ r_1, r_2, r_3, r_4, а центры ихъ лежатъ соотвѣтственно въ точкахъ O_1, O_2, O_3, O_4. Показать, что около четыреугольника $O_1O_2O_3O_4$ можно описать окружность и выразить площадь этого четыреугольника по сторонамъ даннаго и по радіусамъ r_1, r_2, r_3, r_4.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 426. Даны два правильныхъ многоугольника: одинъ объ m, другой объ n сторонахъ. Требуется построить правильный многоугольникъ объ mn сторонахъ.

С. Ш. (Одесса).

№ 427. Рѣшить систему

$$(x+y)(x-y)^2=(y+z)(y-z)^2=(z+x)(z-x)^2.$$

(Заимств.) *П. П.* (Одесса).

№ 428. Опредѣлить объемъ двояковогнутаго стекла, у котораго радіусы кривизны равны r_1 и r_2, наименьшая толщина d, и радіусъ сѣченія стекла плоскостью, проходящею черезъ оптическій центръ и перпендикулярной къ главной оси, равенъ h.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 288. (2 сер.). Медіаны треугольника ABC продолжены до пересѣченія съ описанной окружностью въ X, У, Z. По сторонамъ треугольника ABC опредѣлить стороны треугольника XУZ и его площадь.

Пусть AM, BN, CP будутъ медіаны даннаго $\triangle$-ка, O—точка ихъ пересѣченія.

Извѣстно, что $MA. = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$. Такъ какъ. MA. MX= =BM. CM, то,

$$MX. \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = \frac{a^2}{2},$$

откуда

$$MX = \frac{a^2}{2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}} \text{ и } AX = AM + MX$$

$$AX = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}} = \frac{b^2+c^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}.$$

Также находимъ

$$BУ = \frac{a^2+c^2}{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}} \text{ и } CZ = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}$$

Извѣстно, что медіаны треугольника въ точкѣ пересѣченія дѣлятся въ отношеніи 2:1; поэтому

$$BO = {}^2/_3\ BN = \frac{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{3}.$$

Изъ подобныхъ $\triangle\ \triangle$ AOB и XOУ имѣемъ

$$XУ : OX = AB : BO.$$

Подставивъ въ эту пропорцію

$$OX = OM + MX = \frac{1}{3}\ AM + MX = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{b} + \frac{a^2}{2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}} =$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{3\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}},$$

получимъ

$$XУ = \frac{AB.OX}{BO} = \frac{c(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{[2(b^2+c^2)-a^2]\,[2(a^2+c^2)-b^2]}}$$

и по аналогіи

$$XZ = \frac{b\,(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{[2\,(a^2+b^2)-c^2]\,[2(b^2+c^2)-a^2)}}$$

$$YZ = \frac{[a(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{[\,2(a^2+c^2)-b^2]\,[2(a^2+b^2)-c^2]}}$$

Такъ какъ площадь треугольника равна произведенію сторонъ, раздѣленному на учетверенный радіусъ описанной окружности, то

$$\triangle XYZ = \frac{XY.XZ.YZ}{4\,R}, \text{ гдѣ } R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(b+c-a)\,(a+c)}}$$

$$\triangle\; XYZ = \frac{(a^2+b^2+c^2)^3\sqrt{(a+b+c)\;(a-b+c)\,(a+b-c)\,(c+b-a)}}{4\;(2a^2+2b^2-c^2)\;(2a^2-b^2+2c^2)\;(2b^2+2c^2-a^2)}.$$

Легко провѣрить формулу для $a=b=c$.

К. Щиголевъ (Курскъ).

№ 263. (2 сер.). Для практическаго рѣшенія задачи квадратуры круга древніе египтяне строили квадратъ на $^8/_9$ діаметра даннаго круга. Для рѣшенія обратной задачи—циркулятуры квадрата—древніе индусы описывали окружность радіусомъ, равнымъ половинѣ стороны даннаго квадрата, увеличенной одною третью разности между половиной діагонали и половиной стороны. Опредѣлить, который изъ вышеприведенныхъ пріемовъ точнѣе.

Пусть радіусъ круга $= r$. По построенію египтянъ

$$\pi\; r^2 = \frac{256}{81}\; r;$$

отсюда $\pi = 3{,}16049..$

Пусть сторона квадрата $= a$. Радіусъ равновеликаго круга (по построенію индусовъ) равенъ $\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}-a}{2}\right)$; слѣдовательно

$$a^2 = \frac{a^2}{18}(3+2\sqrt{2})\,\pi,$$

откуда

$$\pi = 18\;(3-2\;\sqrt{2})=3{,}08831.$$

Очевидно пріемъ египтянъ точнѣе пріема индусовъ.

К. Щиголевъ, В. Россовская (Курскъ); *В. Костинъ, А. Полозовъ* (Симбирскъ).

№ 197. (2 сер.). На гипотенузѣ AC и на одномъ изъ катетовъ AB прямоугольнаго треугольника ABC построены квадраты CM и BN, коихъ сосѣднія вершины M и N соединены прямою

MN=d. По данной длинѣ этой прямой d построить прям. треугольникъ, когда кромѣ того еще даны:

1) одинъ изъ катетовъ, AB или BC;

2) гипотенуза AC;

3) одинъ изъ острыхъ угловъ $\angle A$ или $\angle C$;

4) длина перпендикуляра $BD=h$, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу.

Продолжимъ NA и опустимъ на продолженіе перпендикуляръ MF. $\triangle FAM$ очевидно равенъ треугольнику ABC ($CA=AM$, $\angle FAM=\angle CAB$), слѣд. $FA=AB$ и $FM=BC$. Итакъ, прямая MN есть гипотенуза такого треугольника, одинъ катетъ котораго $=$двойному катету AB, а другой—катету BC треугольника ABC. Теперь легко рѣшить предложенныя задачи.

1) На MN описываемъ полуокружность, а изъ N—дугу радіусомъ$=2$ AB; такимъ образомъ опредѣлимъ MF$=$другому катету треугольника и приведемъ вопросъ къ построенію треугольника по двумъ катетамъ.

2) На MN описываемъ полуокружность. Прямая AM должна пройти чрезъ средину катета, проходящаго чрезъ N. Но геом. мѣсто срединъ хордъ, проходящихъ чрезъ N, есть окружность, описанная на ON какъ на діаметрѣ (O—средина MN). Изъ M радіусомъ AC описываемъ дугу, пересѣченіе которой съ окружностью на ON соединяемъ съ N. Тогда опредѣлимъ AN$=$AB катету искомаго треугольника. Остается построить $\triangle$ по гипотенузѣ и катету.

3) (Беремъ $\angle A$) $\angle NAM=180^0-A$. На MN описываемъ полуокружность и также дугу, вмѣщающую $\angle\ 180^0-A$. Пересѣченіе этой дуги съ окружностью, описанной на ON какъ на діаметрѣ, соединяемъ съ N. Тогда AN=AB и затѣмъ строимъ тр—къ по катету и острому углу.

4) Такъ какъ $\triangle\triangle$ FAM и ANM равновелики, то перпендикуляръ, опущенный изъ N на AM будетъ $=h$. На MN описываемъ полуокружность, на ON какъ на діаметрѣ — окружность и изъ N радіусомъ$=h$ описываемъ окружность, къ которой изъ M проводимъ касательную; пересѣченіе послѣдней B съ окружностью описанной на ON, соединяемъ съ N; тогда NB$=$катету искомаго треугольника и вопросъ сведенъ къ построенію треугольника по катету и высотѣ.

И. Бискъ (Кіевъ).

№ 182. (2 сер.). По данному ребру правильнаго тетраэдра опредѣлить радіусъ шара, поверхность котораго касается всѣхъ реберъ тетраэдра. Найти также отношенія радіуса этого шара къ радіусамъ шаровъ вписаннаго въ тетраэдрѣ и описаннаго около него.

Соединимъ средину A ребра SM тетраэдра съ центромъ его O. Очевидно, шаръ, описанный изъ O радіусомъ AO коснется всѣхъ реберъ тетраэдра. Проведемъ высоту SK тетраэдра, тогда изъ подобныхъ $\triangle\triangle$ SAO и SMK

$$\frac{AO}{KM}=\frac{SA}{SK}.$$

Но $MK = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $SA = \frac{a}{2}$ и SK(высота тетраэдра)$= a\sqrt{2/3}$, поэтому

$$\frac{AO}{a/\sqrt{3}} = \frac{a/2}{a\sqrt{2/3}}, \text{ откуда } AO = \frac{a}{\sqrt{8}}.$$

Извѣстно, что радіусъ шара, вписаннаго въ правильный тетраэдръ ребра a, равенъ $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ и радіусъ шара описаннаго равенъ $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Теперь легко найти искомое отношеніе. Замѣтимъ, что произведеніе послѣднихъ радіусовъ $= \frac{a^2}{8}$ т. е. равно $\left(\frac{a}{\sqrt{8}}\right)^2$ Итакъ радіусъ шара, поверхность котораго касается всѣхъ реберъ тетраэдра, есть средняя пропорціональная величина между радіусами шаровъ вписаннаго и описаннаго около тетраэдра.

К. Щиголевъ (Курскъ).

№ 76. (2 сер.). Въ кругъ вписанъ треугольникъ ABC, къ одной изъ сторонъ AB проведенъ перпендикулярный діаметръ EF, на который опущенъ перпендикуляръ CG. Показать, что полусумма сторонъ AC и BC есть средняя пропорціональная между отрѣзками DF и GE (D — пересѣченіе AB и FE), а полуразность этихъ сторонъ—средняя пропорціональная между DE и FG.

Проведемъ высоту тр—ка CK и соединимъ C съ E; точка пересѣченія CE съ AB пусть будетъ J. Тогда

$$CG^2 = DK^2 = FG.GE; \dots \quad (1)$$

съ другой стороны

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2c.\ BK,$$

откуда

$$BK = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c},$$

а потому

$$KD^2 = \left(BK - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{4c^2} = FG.GE.$$

Изъ подобія тр—ковъ DEJ и CEG находимъ

$$\frac{DE}{EG} = \frac{DJ}{CG},$$

а слѣдовательно

$$FG.DE = FG.GE.\ \frac{DE}{GE} = \frac{FG.GE.DJ}{CG},$$

или въ силу (1)

$$FG. DE = CG. DJ;$$

но мы имѣемъ, что

$$DJ = \frac{c}{2} - AJ = \frac{c}{2} - \frac{ac}{a+b} = \frac{c(b-a)}{2(a+b)}$$

и слѣдовательно

$$FG. DE = \frac{a^2-b^2}{2c} \cdot \frac{c(a-b)}{2(a+b)} = \frac{(b-a)^2}{4}; \dots (2)$$

съ другой стороны

$$DE. DF = \frac{c^2}{4},$$

а потому

$$FG. DE. DF. GE = \frac{(a^2-b^2)^2}{16} = \frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{(b-a)^2}{4};$$

но въ силу (2)

$$FG. DE = \frac{(b-a)^2}{4},$$

а слѣдовательно

$$DF. GE = \frac{(a+b)^2}{4},$$

что и требовалось доказать.

Я. Ястржембовскій (Курскъ).

№ 123 (2 сер.). Показать, что квадратъ какой либо стороны гармоническаго четыреугольника равенъ удвоенному произведенію медіанъ, выходящихъ изъ концовъ этой стороны.

Обозначимъ вершины четыреугольника черезъ A,B,C,D, точку пересѣченія діагоналей черезъ O и средины діагоналей AC и BD черезъ M и N.

Такъ какъ $\triangle\triangle$ ABO и OBC имѣютъ равныя высоты, то площади ихъ относятся какъ AO: OC, также относятся и площади тр-ковъ AOD и DOC. Потому.

$$\frac{\triangle ABO}{\triangle BOC} = \frac{\triangle AOD}{\triangle DOC};$$

съ другой стороны

$$\frac{\triangle AOB}{\triangle DOC} = \frac{AB^2}{DC^2} \text{ и } \frac{\triangle AOD}{\triangle BOC} = \frac{AD^2}{BC^2};$$

а слѣдовательно

$$\frac{\triangle ABO}{\triangle BOC} = \frac{AB.AD}{DC.BC},$$

или, по свойству гармоническаго четыреугольника

$$\frac{\triangle ABO}{\triangle BOC}=\frac{AB^2}{BC^2}, \text{ т. е. } \frac{AB^2}{BC^2}=\frac{AO}{OC}.$$

Но въ гармоническомъ четыреугольникѣ $\angle ANB = \angle BNC$, слѣдовательно

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AO}{OC}=\frac{AB^2}{BC^2},$$

а также

$$\frac{BC^2}{CD^2}=\frac{BM}{DM},$$

откуда

$$\frac{AB^2}{CD^2}=\frac{AN.BM}{NC.MD}.$$

Но въ гармоническомъ четыреугольникѣ $AB.\,BC.\,CD.\,DA = AB^2.DC^2 = 4AN.BM.CN.DM$, откуда, перемноживъ два послѣднихъ равенства, найдемъ

$$AB^4 = 4AN^2.BM^2 \text{ или } AB^2 = 2AN.BM,$$

что и требовалось доказать.

И. Бискъ (Кіевъ); *И Богоявленскій* (Шуя); *В Россовская* (Курскъ).

Списокъ задачъ 1-й серіи, на которыя не было получено ни одного удовлетворительнаго рѣшенія *).

№ 289. Принимая температуру и влажность воздуха постоянной и не обращая вниманія на незначительное измѣненіе напряженія силы тяжести съ высотою, показать, что по мѣрѣ возрастанія высоты надъ даннымъ мѣстомъ въ ариѳметической прогрессіи, показанья барометра будутъ уменьшаться въ геометрической прогрессіи. Опредѣлить на основаніи этого факта общій видъ формулы, выражающей законъ измѣненія атмосфернаго давленія съ высотою.

Г. Флоринскій.

№ 325. Къ веревкѣ, концы которой неподвижны, подвѣшены неподвижно на шнуркахъ два груза. Какъ найти вѣсъ одного изъ нихъ, если вѣсъ другого извѣстенъ? *А. Войновъ.*

№ 348. Найти n цѣлыхъ чиселъ $z, y, x....t$ такъ, чтобы ихъ произведеніе дѣлилось на ихъ сумму безъ остатка. *С. Шостакъ*

№ 365. Найти цѣлыя положительныя числа a, b, c и d, удовлетворяющія условію

$$\frac{ad-1}{a+1}+\frac{bd-1}{b+1}+\frac{cd-1}{c+1}=d.$$

В. Ермаковъ.

---

*) См. В. О. Ф. № 154.

№ 369. Показать, что всякая плоскость, проходящая через средины двухъ противоположныхъ реберъ тетраэдра, дѣлитъ его на двѣ равномѣрныя части. Выразить объемъ тетраэдра черезъ площадь такого сѣченія S, длину ребра a и уголъ α, образуемый плоскостью сѣченія съ однимъ изъ реберъ.

М. Попруженко.

№ 377. Доказать тождество:

$$P_n+\frac{1}{P_1}P_{n+1}+\frac{1}{P_2}P_{n+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{P_{k-1}}P_{n+k-1}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{P_{n-1}}P_{n+k}$$

гдѣ P_1, P_2, P_n, P_{n+1},.. P_{n+k} суть символы, обозначающіе число возможныхъ перестановокъ изъ 1, 2,... n, $n+1$,... $n+k$ элементовъ.

В. Гиммельфарбъ.

№ 396. Показать, что уравненія

$$a^2(x^2+xy+y^2)-axy(x+y)+x^2y^2=0$$

$$a^2(y^2+yz+z^2)-ayz\,(y+z)+\,y^2z^2=0$$

$$a^2(z^2+zx+x^2)-azx(z+x)+z^2x^2=0\,,$$

зависимы.

Я. Тепляковъ.

№ 404. Вершины нѣкотораго четыреугольника не умѣщаются на чертежѣ; на немъ проведены лишь части его сторонъ. Найти точку пересѣченія діагоналей четыреугольника. *Д. Расторгуевъ.*

№ 407. Въ двухъ данныхъ точкахъ построить данные углы такъ, чтобы ихъ соотвѣтственныя стороны пересѣкались на данной прямой.

В. Ермаковъ.

№ 420. Даннымъ радіусомъ описать окружность такъ, чтобы сумма разстояній этой окружности отъ трехъ данныхъ точекъ была minimum. Изслѣдовать вопросъ, измѣняя данный радіусъ отъ 0 до ∞ и указать, въ какихъ случаяхъ задача рѣшается при помощи циркуля и линейки.

И. Чирьевъ.

№ 427. Сравнить величины радикаловъ

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4}\ldots\ldots\sqrt[n]{n}.$$

М. Попруженко.

№ 429. Построить гармоническій четыреугольникъ, когда даны двѣ діагонали его и уголъ между ними. *В. Ермаковъ.*

№ 439. Опредѣлить условія maximum'а площади четыреугольника, когда даны уголъ и двѣ противолежащія стороны. Обобщить для многоугольниковъ.

А. Бобятинскій.

№ 463. Показать, что если простое число p имѣетъ видъ $4q+3$, то одно изъ двухъ чиселъ

$$1.2.3.4.5\ldots\ldots\frac{p-1}{2}\pm 1$$

дѣлится на p.

Л. И. Постернакъ.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса 13 Марта 1893 г.

Типо-литографія „Одесскихъ Новостей". Пушкинская, д. № 11.